

На правах рукописи

Гавриченко Александр Константинович

**ТОМОГРАФИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДАННЫХ В ЗАДАЧАХ  
КВАНТОВОЙ ИНФОРМАТИКИ**

Специальность

05.27.01 — твердотельная электроника, радиоэлектронные компоненты,  
микро- и нанoeлектроника, приборы на квантовых эффектах

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва, 2013 г.

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Физико-технологическом институте РАН (ФТИАН РАН)

**Научный руководитель:**

доктор физико-математических наук **Юрий Иванович Богданов**

**Официальные оппоненты:**

**Эдуард Беняминович Фельдман**, д. ф.-м. н., зав. лабораторией  
ФГБУН Институт проблем химической физики РАН, г. Черноголовка.

**Михаил Владимирович Фёдоров**, д. ф.-м. н., проф., зав. сектором  
ФГБУН Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН, г. Москва.

**Ведущая организация:**

Физический факультет Московского государственного университета  
имени М.В. Ломоносова

**Защита состоится** «18» декабря 2013 г. в \_\_\_ ч. \_\_\_ мин. на заседании диссертационного совета Д 002.204.01 при Физико-технологическом институте РАН по адресу: 117218, Москва, Нахимовский проспект, 36/1, ФТИАН, конференц-зал

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Физико-технологического института РАН

Автореферат разослан «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2013 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета Д 002.204.01

кандидат физико-математических наук  Вьюрков В.В.

## Общая характеристика работы

### **Актуальность темы диссертации**

Тенденция миниатюризации элементной базы вычислительных машин отражается в феноменологическом законе Мура, по которому степень интеграции микросхем увеличивается вдвое каждые 2 года. Ясно, что фундаментальный предел миниатюризации транзисторов ограничен размерами атомов. Возникает задача сохранения при достижении этого порога экспоненциального роста производительности вычислительных устройств. Это возможно с помощью новой парадигмы квантовых информационных технологий [1-2]. Центральной идеей квантовых вычислений является замещение классических логических вентилей унитарными преобразованиями квантовых состояний. «Квантовым битом» (кубитом) может являться, например, поляризационное состояние фотона или спиновые состояния ядер и электронов в атоме. Измерение преобразованного состояния позволяет получить результаты вычисления. Построение приборов на квантовых эффектах, способных проводить квантовые вычисления, является одной из перспективных тем технологического развития [3-4]. Для проведения такого вычисления, очевидно, необходимо установить насколько точно соответствует квантовое состояние тому, что предписывается квантовым алгоритмом на всех этапах вычисления. Подчеркнём, что в такой задаче необходимо оценивать именно квантовые свойства состояния, например, амплитуды вероятностей совпадения данного квантового состояния с базисными.

В силу принципа дополнительности Бора, для полной характеристики квантового состояния, необходимо множество взаимно-дополнительных измерений. Для получения информации о реальном квантовом состоянии необходимо обратиться к статистической выборке, состоящей из результатов такого множества измерений одинаково приготовленных квантовых состояний. Тем самым, мы приходим к задаче восстановления (томографии) квантового состояния по статистическим данным.

В качестве статистической выборки, на основе которой происходит восстановление квантового состояния, выступает набор результатов квантовых измерений – проекций на некоторые, специальным образом выбранные, квантовые состояния. Порядок проведения измерений образует протокол томографии. Среди методов статистического восстановления квантовых состояний наибольшее значение имеют те, которые обеспечивают максимальную точность, близкую к фундаментальному пределу в пространстве высокой размерности. В настоящей работе рассматривается корневой метод квантовой томографии. Он прилагается к большой группе протоколов, имеющих важное научное и практическое значение. Эти протоколы основаны на состояниях, связанных с симметрией многогранников. Протокол, основанный на геометрии тетраэдра, обеспечивает минимальное число строк, достаточное для восстановления произвольного квантового состояния [5]. Вместе с тем, точность томографии, вообще говоря, растёт с увеличением числа строк протокола. Для правильных многогранников томографические протоколы были рассмотрены в работе [6]. Число правильных многогранников в трёхмерном пространстве равно 5, и поэтому для улучшения точности восстановления необходимо рассматривать неправильные многогранники с высокой симметрией и большим числом граней, чем у платоновых тел.

Заметим, что вопрос точности, которую могут обеспечивать рассматриваемые протоколы, оставался открытым. Этот вопрос стал одной из ключевых тем настоящего исследования. В предлагаемом методе томографии потери точности убывают по закону  $1/n$ , где  $n$  - объём статистической выборки, что существенно быстрее, чем, например, в томографии по методу [6], обеспечивающей точность лишь порядка  $1/\sqrt{n}$ .

Разработанный нами оригинальный метод восстановления квантовых состояний позволяет исследовать адекватность квантовых измерений и полноту протоколов томографии. Для этого используется сингулярное разложение специальной матрицы измерений, которая может быть построена

для любого квантового протокола. Метод равно пригоден для восстановления как чистых, так и смешанных состояний.

В работе рассмотрена важная задача адекватного восстановления ранга  $r$  слабо засорённой смеси. Показано, что ранг можно определить лишь в случае, когда объём статистической выборки превышает некоторое пороговое значение.

Таким образом, актуальность диссертационной работы обусловлена научной и практической важностью разработки методов прецизионных квантовых измерений, обеспечивающих адекватный и полный анализ квантовых состояний.

**Целью диссертационной работы** является математическое исследование методов восстановления квантовых состояний и обеспечение экспериментальных технологий алгоритмическими средствами анализа данных квантовых измерений.

**Задачи, решаемые в рамках настоящей диссертации:**

1) Построение критериев оценки адекватности, полноты и точности в задачах статистического восстановления квантовых состояний.

2) Рассмотрение статистических характеристик для распределения точности реконструкции квантового состояния, формулировка количественной границы для максимально возможной точности квантовой томографии. Математическое моделирование характеристик точности квантовых протоколов, в основе которых лежит геометрия многогранников, обладающих высокой симметрией.

3) Статистическое восстановление поляризационных квантовых состояний фотонов и бифотонов на основе экспериментальных данных, полученных в лаборатории квантовой информации и квантовой оптики физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

4) Разработка методов генерации статистических данных, связанных с компьютерным моделированием квантовых измерений, разработка статистического томографического метода моделирования квантовых систем.

**Научная новизна работы** заключается в следующем:

- 1) развит статистический подход к исследованию адекватности и полноты протоколов квантовой томографии, а также методология оценки точности восстановления квантовых состояний; проведена теоретическая оценка минимальных потерь точности;
- 2) получены теоретические и численные оценки потерь точности восстановления для протоколов, основанных на многогранниках;
- 3) рассмотрены приложения метода статистической квантовой томографии к обработке однофотонных и бифотонных экспериментов;
- 4) разработан томографический метод Монте-Карло, позволяющий моделировать квантовые состояния.

**Научная и практическая ценность.** Предложенная методология обеспечивает возможность контроля качества и эффективности квантовых информационных технологий. Развита способ проверки точности генерации квантовых состояний, что играет важную роль в алгоритмической юстировке приборов на квантовых эффектах.

**Положения выносимые на защиту:**

- 1) Развита общий подход к оценке качества и эффективности протоколов квантовых измерений, основанный на критериях адекватности, полноты и точности в задачах статистического восстановления квантовых состояний. Рассмотрены статистические характеристики распределения точности реконструкции квантового состояния и сформулирована количественная граница для максимально возможной точности квантовой томографии. Проведена теоретическая оценка минимальных потерь точности.
- 2) Выполнено детальное математическое моделирование характеристик точности квантовых протоколов, в основе которых лежит геометрия многогранников, обладающих высокой симметрией. Представлены результаты теоретического рассмотрения и численных экспериментов для различных однокубитовых и многокубитовых квантовых состояний.

3) Разработаны протоколы квантовых измерений и осуществлено статистическое восстановление поляризационных квантовых состояний фотонов и бифотонов на основе экспериментальных данных. Разработана теоретическая модель и выполнен анализ реальных и численных экспериментов, направленных на восстановление смешанных состояний, близких к чистому состоянию. Предложен и обоснован критерий оптимального выбора между конкурирующими моделями чистого и смешанного состояний.

4) Разработаны методы и алгоритмы генерации статистических данных, связанных с моделированием квантовых измерений. Разработан статистический томографический метод моделирования квантовых систем. Выполнен расчёт мод Шмидта для двухэлектронной волновой функции в отрицательном ионе водорода и проанализированы характеристики квантовой запутанности в этой системе.

### **Апробация работы**

Результаты работы были представлены на конференциях **«Quantum Informatics»**, Звенигород, Россия, 2009 г., **«XIII International Conference on Quantum Optics and Quantum Information»**, Киев, Украина, 2010 г и **«Quantum Informatics»**, Звенигород, Россия, 2012 г.

### **Публикации**

По теме диссертации опубликовано 11 работ, из которых 5 – в рецензируемых журналах, удовлетворяющим требованиям ВАК.

### **Личный вклад автора**

Результаты диссертационной работы получены либо лично автором, либо при его непосредственном участии.

### **Структура и объём диссертации**

Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения, шести приложений и списка литературы из 106 наименований. Содержит 23 рисунка, 3 таблицы и занимает объём 157 страниц.

## Основное содержание диссертации

**Введение** посвящено формулировке задачи статистической томографии квантовых состояний, а также описанию целей и задач диссертационной работы. Вводятся ключевые элементы математического формализма квантовой томографии: понятия **аппаратной матрицы  $X$** , строки которой являются координатами векторов-проекторов и **матрицы измерений  $B$** , чьи строки являются тензорными произведениями строк аппаратной матрицы.

**В первой главе** рассмотрена новая методология статистического оценивания качества протоколов квантовых измерений. Эта методология основана на исследовании полноты, адекватности и точности квантовых измерений. Критерий полноты базируется на рассмотрении сингулярного разложения специальной матрицы, построенной на основе операторов измерений. Оценка адекватности протокола основана на наличии избыточности квантовых измерений по сравнению с минимальным числом измерений, необходимых для восстановления квантового состояния. **Адекватность квантовых измерений** оценивается как степень согласованности избыточных статистических данных с математической моделью, основанной на квантовой теории. Характеристики точности статистического восстановления произвольных квантовых состояний исследуются на основе универсального статистического распределения для потерь точности. Развитые методы и подходы применяются к большой группе квантовых протоколов, в основе которых лежит геометрия многогранников, обладающих высокой симметрией [A4].

Предложенный общий подход позволяет экспериментатору наилучшим образом распорядиться имеющимися у него ресурсами с целью разработки и реализации оптимального протокола квантовых измерений, сравнивать различные протоколы квантовых измерений между собой, а также по отношению к фундаментальному уровню точности.

Проверку адекватности можно осуществить, применяя метод псевдоинверсии Мура-Пенроуза [7] к системе  $B\rho = P$ , где  $B$  – матрица измерений,



$P$  – вектор, элементы которого представляют число ожидаемых в эксперименте событий. Сингулярное разложение позволяет преобразовать систему к специальному виду. Избыточность протокола выражается в том, что количество строк протокола больше числа ненулевых сингулярных значений матрицы измерений. Модель адекватна, если преобразованная система совместна, то есть нулевым сингулярным значениям матрицы  $B$ , соответствующим избыточным строкам протокола, отвечают нулевые правые части преобразованной системы.

Протокол томографии **полон**, если все сингулярные значения матрицы измерений отличны от нуля.

Для исследования точности восстановления квантовой системы необходимо понятие **степени согласия**, определяемое выражением  $F = |\langle c_0 | c \rangle|^2$  для чистых состояний и выражением  $F = \left( \text{Tr} \sqrt{\rho_0^{1/2} \rho \rho_0^{1/2}} \right)^2$  – для смешанных, где индексом 0 обозначено теоретическое состояние, а без индекса – восстановленное.

**Потери точности**  $dF = 1 - F$  (отклонение степени согласия от единицы) являются случайной величиной с обобщённым хи-квадрат распределением

$dF = \sum_{j=0}^m d_j \xi_j^2$  где  $\xi_j$  – независимые стандартные нормальные величины.

Минимальные значения моментов распределения достигаются при условии равенства весовых коэффициентов  $d_1 = \dots = d_m = d$ . В случае, когда набор проекционных операторов образует неортогональное разложение единицы

$\sum_{j=1}^m \Lambda_j = \sum_{j=1}^m \sum_{l=0}^{s-1} X_j^{l+} X_j^l = I_0 E$ , верно соотношение  $\frac{1}{4n} \sum_{j=1}^m \frac{1}{d_j} = s - 1$ , где  $n$  – объём

выборки,  $s$  – размерность гильбертова пространства.

Томография осуществляется с помощью корневого подхода [8, 9], который заключается в том, что вместо матрицы плотности рассматривается квадратный корень из неё. Для восстановления чистого состояния применяется оценка методом максимального правдоподобия [10]

коэффициентов разложения волновой функции  $\psi(x) = \sum_{j=0}^{s-1} c_j \varphi_j(x)$  в ряд Фурье по функциональному ортобазису  $\{\varphi_j\}_{j=0}^{s-1}$ . Измерения, проводимые во взаимно-дополнительном пространстве, требуют нахождения коэффициентов аналогичного разложения Фурье-образа заданной функции.

В работе [A4] представлены протоколы томографии, основанные на многогранниках с высокой симметрией: правильных многогранниках, а также усечённом икосаэдре (геометрия фуллерена  $C_{60}$ ) и пентакисдодекаэдре (додекаэдр, к каждой грани которого присоединена основанием пятиугольная пирамида). Вписав сферу Блоха в такой многогранник, выберем направления, исходящие из центра сферы Блоха к центрам граней. Эти направления и будут составлять протокол томографии. Статистическая выборка будет задаваться результатами проектирования искомого состояния на выбранные направления. Проекторы, описанные таким образом, составляют неортогональное разложение единицы. Для восстановления многокубитового состояния в качестве строк протокола выбираются тензорные произведения строк однокубитовых протоколов.

На рисунке 1 показано распределение потерь точности  $1-F$  на сфере Блоха при восстановлении состояния кубита протоколами, основанными на кубе, правильном октаэдре, усечённом икосаэдре, пентакисдодекаэдре. Отметим, что для протоколов, основанных на двойственных многогранниках, потери точности слабо отличаются, поэтому из пары таких протоколов целесообразнее выбирать протокол с меньшим количеством строк.

Средние потери точности  $\langle 1-F \rangle$  для некоторого протокола обратно пропорциональны объёму выборки  $n$ . Для характеристики точности протокола вводится функция потерь, не зависящая от объёма выборки:

$$L = n \langle 1-F \rangle = n \sum_{j=1}^{j_{\max}} d_j, \text{ где } j_{\max} = (2s-r)r-1.$$

Для минимума функции потерь точности (если векторы протокола образуют неортогональное разложение единицы) справедливо соотношение:

$$L_{\min} = \frac{j_{\max}^2}{4(s-1)}.$$

Верхняя граница функции потерь была найдена в численном эксперименте, моделирующем восстановление  $l=1, 2, 3$  кубит – см. табл. 1.

	1 кубит ( $s = 2$ $L_{\min} = 1$ )	2 кубита ( $s = 4$ $L_{\min} = 3$ )	3 кубита ( $s = 8$ $L_{\min} = 7$ )
Тетраэдр ( $m = 4$ )	$3/2=1.5$	$\approx 4.44$	$\approx 10.4$
Куб ( $m = 6$ )	$9/8=1.125$	$\approx 3.58$	$\approx 8.2$
Октаэдр ( $m = 8$ )	$9/8=1.125$	$\approx 3.47$	$\approx 7.9$
Додекаэдр ( $m = 12$ )	$36/35$	$\approx 3.42$	$\approx 7.8$
Икосаэдр ( $m = 20$ )	$45/44$	$\approx 3.39$	$\approx 7.8$
Усечённый икосаэдр ( $m = 32$ )	$\approx 234/233$	$\approx 3.38$	$\approx 7.7$
Пентакисдодекаэдр ( $m = 60$ )	$\approx 1.0041$	$\approx 3.38$	$\approx 7.7$

Таблица 1. Результаты численных экспериментов, задающие максимальные потери точности для томографии чистых состояний посредством протоколов, задаваемых многогранниками

В случае восстановления смешанного состояния «белого шума», когда матрица плотности пропорциональна единичной, можно указать связь между весовыми коэффициентами распределения потерь точности и сингулярными значениями матрицы измерений:

$$d_j = \frac{m^l}{4snb_j^2}.$$

Тогда одним из параметров, характеризующих качество восстановления, станет число обусловленности

$K = \text{cond}(B) = b_{\max} / b_{\min}$ . Для протоколов, основанных на многогранниках,  $K = (\sqrt{3})^l$ , где  $l$  – число кубит.

Результаты численного эксперимента по восстановлению состояния из нескольких кубитов (Белла и обобщённого GHZ от 3 до 8 кубит) с помощью протокола, основанного на тетраэдре, демонстрируются на рисунке 2.

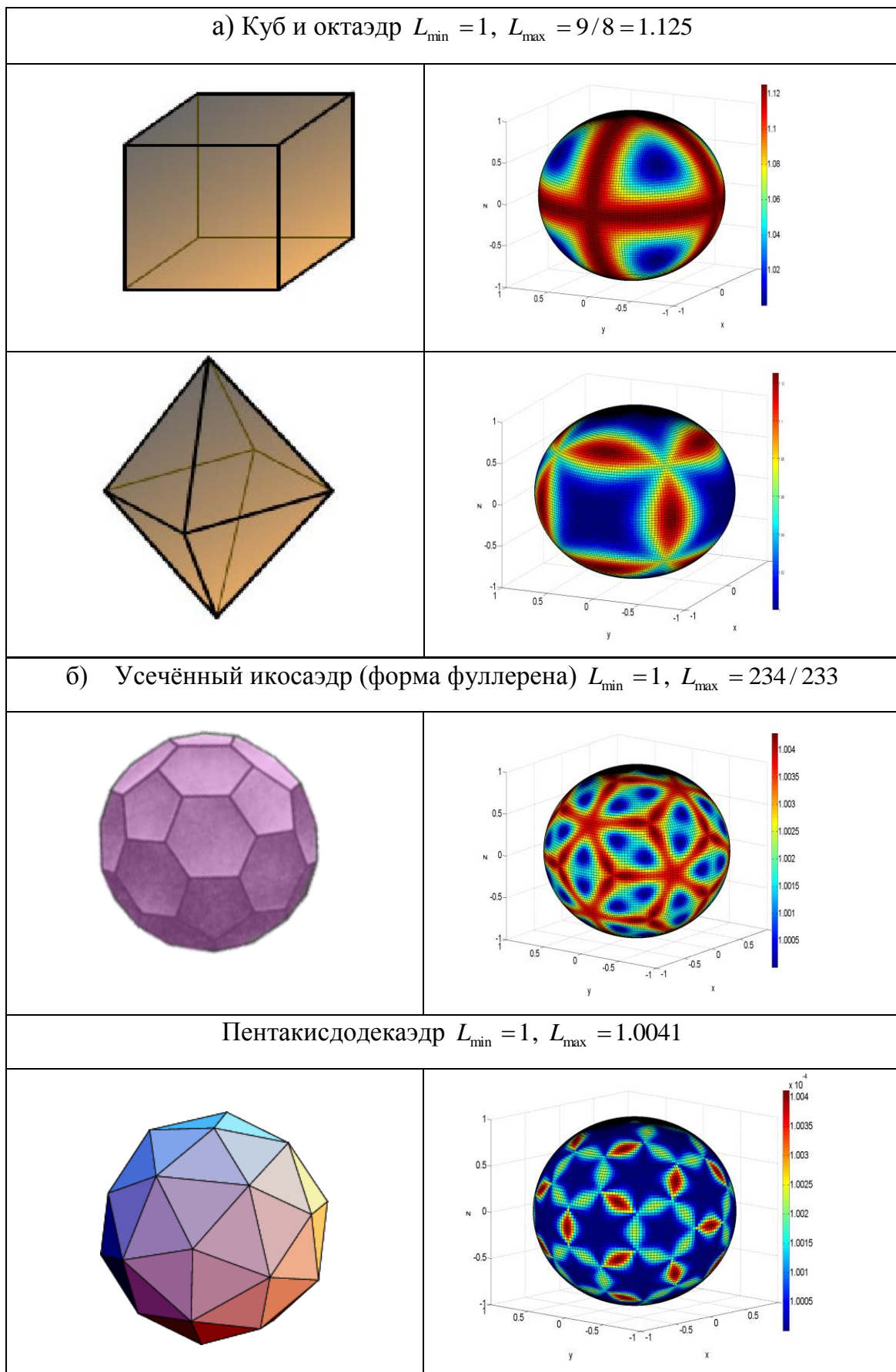


Рис. 1. Распределение потерь точности  $I-F$  ( а)  $1.12 \div 1.02 \times 10^{-3}$ ; б)  $1.004 \div 1.0005 \times 10^{-3}$ ) на сфере Блоха при восстановлении состояния кубита протоколом на основе а) куба (вверху) и правильного октаэдра (внизу); б) усечённого икосаэдра и пентакисдодекаэдра

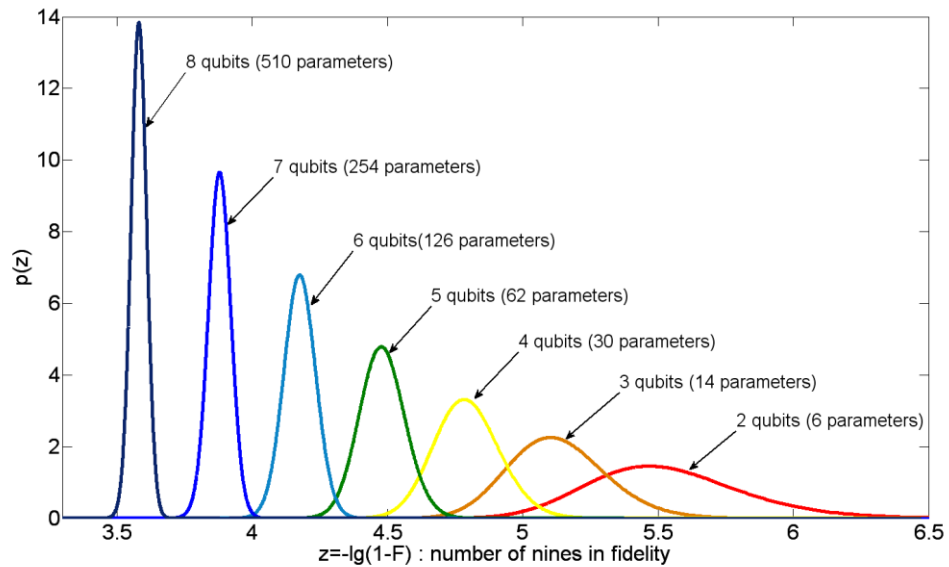


Рис.2. Точность восстановления состояния Белла и GHZ- состояния в зависимости от числа кубитов. Кривые справа налево: 2 кубита (6 параметров), 3 кубита (14 параметров), 4 кубита (30 параметров), 5 кубитов (62 параметра), 6 кубитов (126 параметров), 7 кубитов (254 параметра), 8 кубитов (510 параметров). Объем выборки 1 млн.

**Во второй главе** представлены результаты практического воплощения методов и алгоритмов квантовой томографии. Полученные результаты связаны с анализом однофотонных и двухфотонных оптических поляризационных квантовых состояний. Работы в этой области были выполнены совместно с лабораторией квантовой информации и квантовой оптики физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова [11-14]. Вклад автора в выполненные работы был связан с компьютерным моделированием экспериментов до их проведения, оптимизацией протоколов квантовых измерений, а также с анализом экспериментальных данных [A1, A3, A5].

Рассмотрим восстановление поляризационных состояний фотона [A5]. Степень чистоты состояния выражается энтропией  $S = -\sum_{n=1}^2 \lambda_n \log_2 \lambda_n$ , где  $\lambda_n$  - собственные значения матрицы плотности. В экспериментах томография осуществлялась с помощью протоколов, S6 (куб), R4 (правильный тетраэдр), J4 [15] и V36 (36 поворотов оптической оси фазовой пластинки относительно

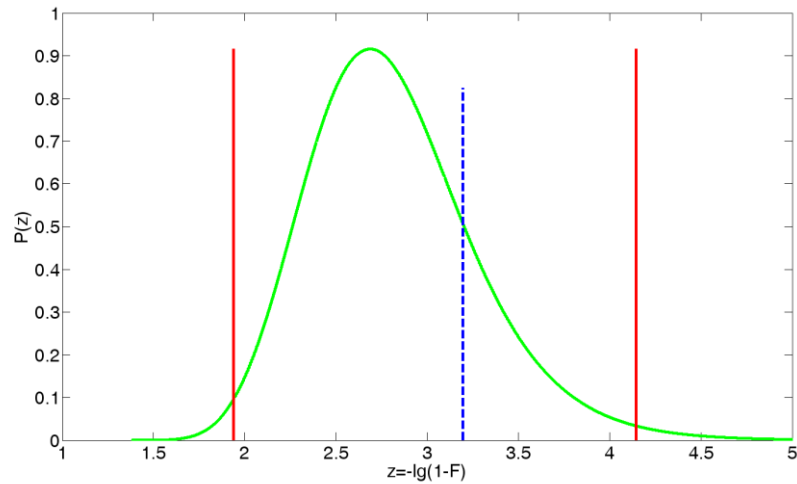


Рис. 3. Восстановление поляризационного состояния фотона с энтропией  $S = 0.6675$ . Протокол В36. Объём выборки  $n = 2518$ . Достигнутый в эксперименте уровень согласия ( $F = 0.99936$ ) показан штриховой вертикальной линией на фоне теоретического распределения точности (сплошная кривая), при этом сплошные вертикальные линии задают 1% и 99% квантили распределения:  $F(1\%) = 0.988477$   $F(99\%) = 0.999928$ .

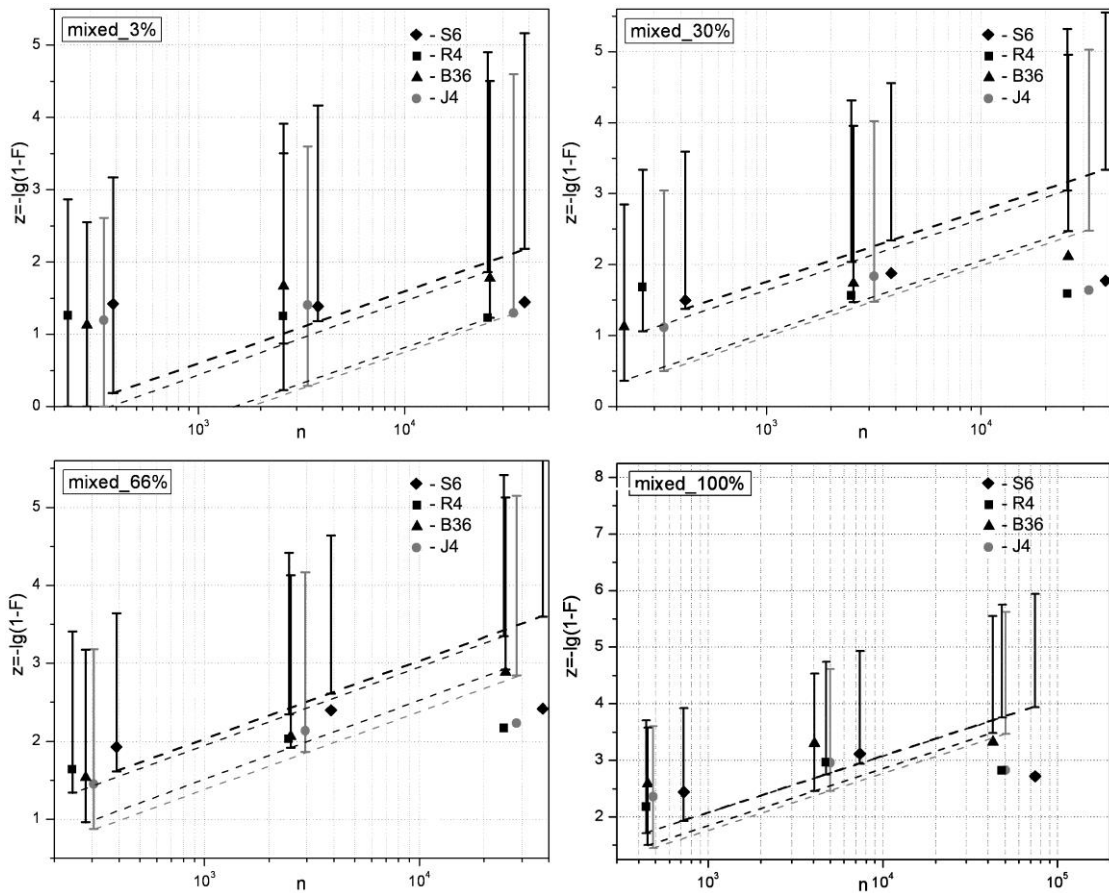


Рис. 4. Восстановление поляризационных состояний фотонов. Степень чистоты состояния характеризуется энтропией и задана в процентах. Вертикальные отрезки показывают 1%- и 99%- квантили для теоретического распределения степени согласия. Штриховые линии указывают нижнюю границу статистического распределения. При возрастании объёма выборки до порядка  $10^5$  точному восстановлению препятствует влияние инструментальных ошибок. Точность возрастает с увеличением энтропии состояния: при  $S \approx 3\%$  точность  $F = 0.93 \div 0.94$ , при  $S \approx 100\%$  точность  $F > 0.99$ .

вертикали с шагом  $10^\circ$ ). В каждом случае были произведены оценка точности по экспериментальным данным, расчёт теоретического распределения точности, а также расчёт оценок для нижней и верхней границ точности.

Для иллюстрации на рис.3 показаны характеристики точности восстановления состояния с энтропией  $S = 0.6675$  с помощью протокола ВЗ6.

Рассмотрим однокубитовое смешанное состояние  $\rho = (1-p)\rho^{(0)} + p\rho^{(1)}$  ( $\rho^{(0)}$  и  $\rho^{(1)}$  – чистые ортогональные состояния) с малой засорённостью  $p \ll 1$ .

Оценка засорённости  $\hat{p}$  распределена асимптотически нормально; её среднее

равно истинной засорённости  $p$ , а дисперсия  $\sigma^2 = \frac{1}{I_F}$ , где  $I_F = \sum_{j=1}^m \frac{t_j (\lambda_j^{(1)} - \lambda_j^{(0)})^2}{(1-p)\lambda_j^{(0)} + p\lambda_j^{(1)}}$  -

информация Фишера,  $\lambda_j^{(0)}$   $\lambda_j^{(1)}$  - интенсивности генерации событий, а  $t_j$  - время

экспозиции для  $j$ -й строки протокола. Пусть  $d_j^0 = nd_j$ , где  $d_j$  - веса в

распределении потерь точности. В модели чистого состояния вектор  $d_j^{(0)}$

имеет две компоненты  $(d_1^{(0)}, d_2^{(0)})$ , а в модели смешанного состояния – три

$(d_1^{(0)}, d_2^{(0)}, d_3^{(0)})$ . Если объём выборки  $n > \frac{d_3^{(0)}}{p}$ , то при восстановлении следует

исходить из модели смешанного состояния [A5]. На рис. 5 приводится

сравнение восстановления квантового состояния с помощью адекватной

чистой и неадекватной смешанной моделей. Мы видим из рис. 5, что в

рассматриваемом примере адекватная модель обеспечивает

точность  $F > 0.999$ , а неадекватная модель не гарантирует даже  $F > 0.99$ .

Томография кукварта [A1], построенного на основе бифотона,

осуществляется с помощью трансформации поляризационного состояния

парой пластинок (с оптическими толщинами  $Wp_1$  и  $Wp_2$ ). Повороты

пластинок подчиняются протоколу [14]. На рис. 6 представлены отличия в

теоретических оценках потерь точности восстановления в случае

оптимального ( $Wp_1 = 0.988nm$  и  $Wp_2 = 0.836nm$ ) и неоптимального

( $Wp_1 = 0.836mm$  и  $Wp_2 = 0.536mm$ ) подбора оптических толщин пластинок для специально приготовленного кварта.

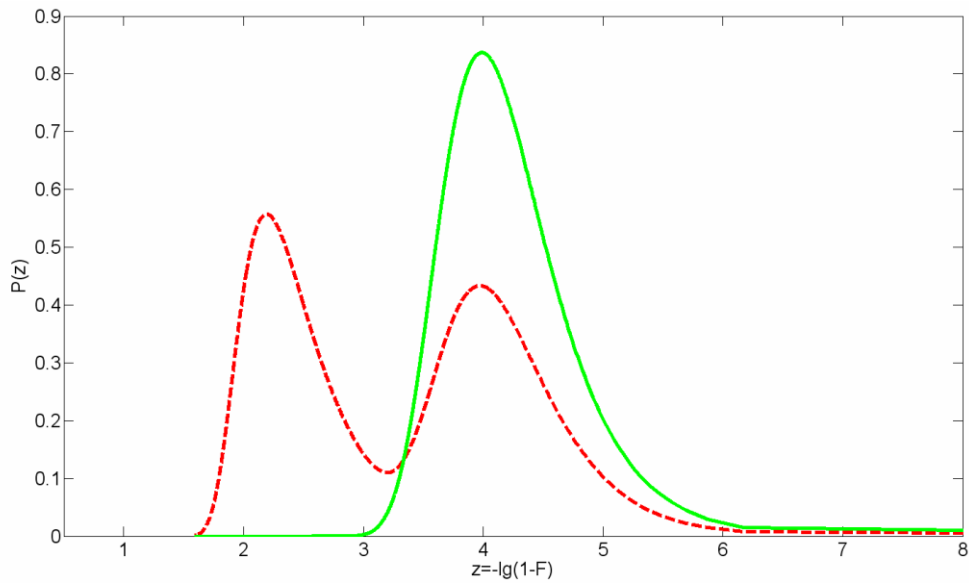


Рис 5. Распределение  $P(z)$  числа девяток в записи вероятности совпадения (Fidelity). Сплошная линия – адекватная модель чистого состояния, штриховая – неадекватная модель смешанного состояния. Рисунок отвечает состоянию с координатами  $\theta = 0.71796\pi$  и  $\varphi = 0.12594\pi$  на сфере Блоха

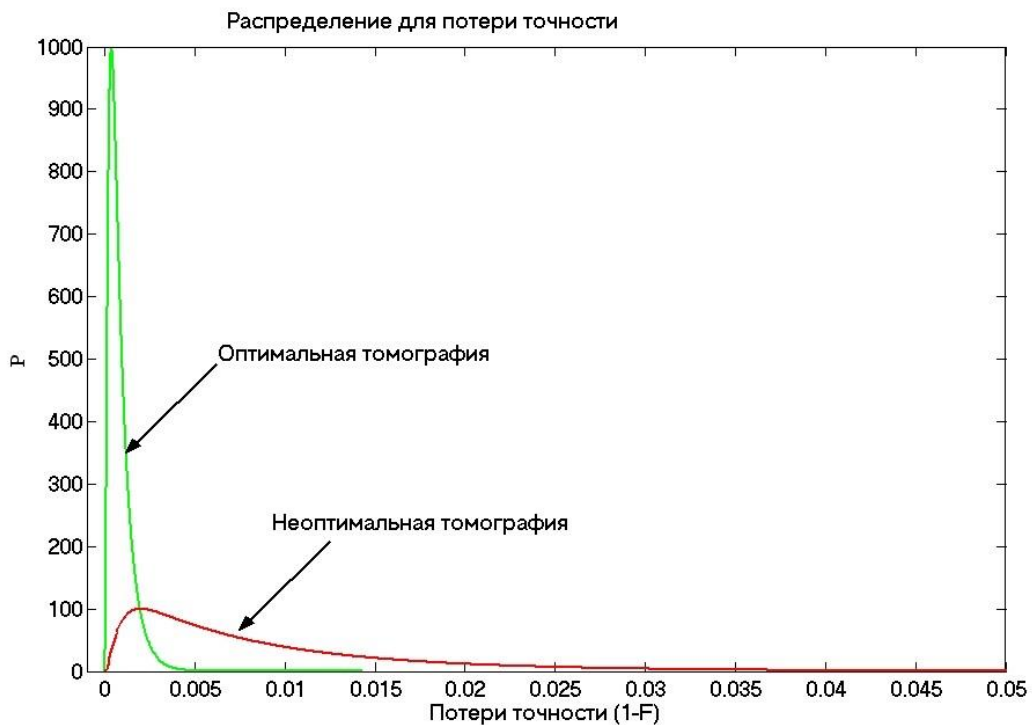


Рис.6. Сравнение распределения потерь точности для оптимального и неоптимального протоколов томографии.



Представленные на рис.6 распределения для потери точности с очевидностью свидетельствуют о преимуществе оптимального протокола томографии по сравнению с неоптимальным протоколом. Эксперимент подтвердил эти априорные теоретические выводы. Анализ экспериментальных данных показал, что в случае выбора неоптимальных толщин степень согласия оказалась равной  $F = 0.975$ , а в оптимальном случае -  $F = 0.993$ .

**В третьей главе** рассматривается задача статистического моделирования квантовых систем [Аб]. Представлен новый метод статистического моделирования квантовых систем, основанный на генерации данных методом Монте-Карло и их целенаправленной томографии в направлении минимума энергии. Численная процедура решения задачи базируется на оптимизации целевого функционала, обеспечивающего компромисс между максимизацией статистической функции правдоподобия и минимизацией энергии. Для этого в качестве ортобазиса в разложении Фурье пси-функции берётся набор собственных функций уравнения Шрёдингера, а в целевой функционал метода максимального правдоподобия добавляется слагаемое, характеризующее среднюю энергию. Чтобы найти возбуждённые состояния квантовой системы, к целевому функционалу добавляются слагаемые, описывающие ортогональность искомого состояния к уже найденным.

В томографическом методе Монте-Карло энергетические параметры целевого функционала определяются на основе выборки, сгенерированной с помощью алгоритма Метрополиса [16]. В качестве оценки средней энергии  $\langle E \rangle$  берётся сумма средней потенциальной и средней кинетической энергий, вычисленная на основе выборок  $x_k$ ,  $k = 1, \dots, n$  и  $p_h$ ,  $h = 1, \dots, m$  в координатном и импульсном взаимно-дополнительных пространствах, соответственно.

С помощью квантового метода Монте-Карло были вычислены:

а) стационарные квантовые состояния в потенциальной яме Пешля-Теллера  $U(x) = \frac{-\hbar^2}{2ma^2} \frac{\lambda(\lambda-1)}{\text{ch}^2(x/a)}$  – рис. 7; б) волновая функция основного состояния и энергия системы отрицательного иона водорода  $E = -0.5273 \pm 0.0008$  а.е. (экспериментальное значение  $E(\text{H}^-) \approx -0.5277$ ), что ниже уровня  $-0.5$ , при котором система становится нестабильной; в) моды Шмидта радиальной двухчастичной волновой функции Н  $\psi(r_1, r_2) = \sqrt{\lambda_1} \psi_1(r_1) \psi_1(r_2) - \sqrt{\lambda_2} \psi_2(r_1) \psi_2(r_2)$ ,  $\lambda_1 \approx 0.88$ ,  $\lambda_2 \approx 0.12$  – рис. 8. Отсюда следует, что при использовании метода самосогласованного поля Хартри-Фока, соответствующего сепарабельному приближению, квантовое состояние может быть описано с точностью, не превышающей  $\lambda_1 \approx 88\%$ .

**В заключении** кратко сформулированы общие выводы по работе.

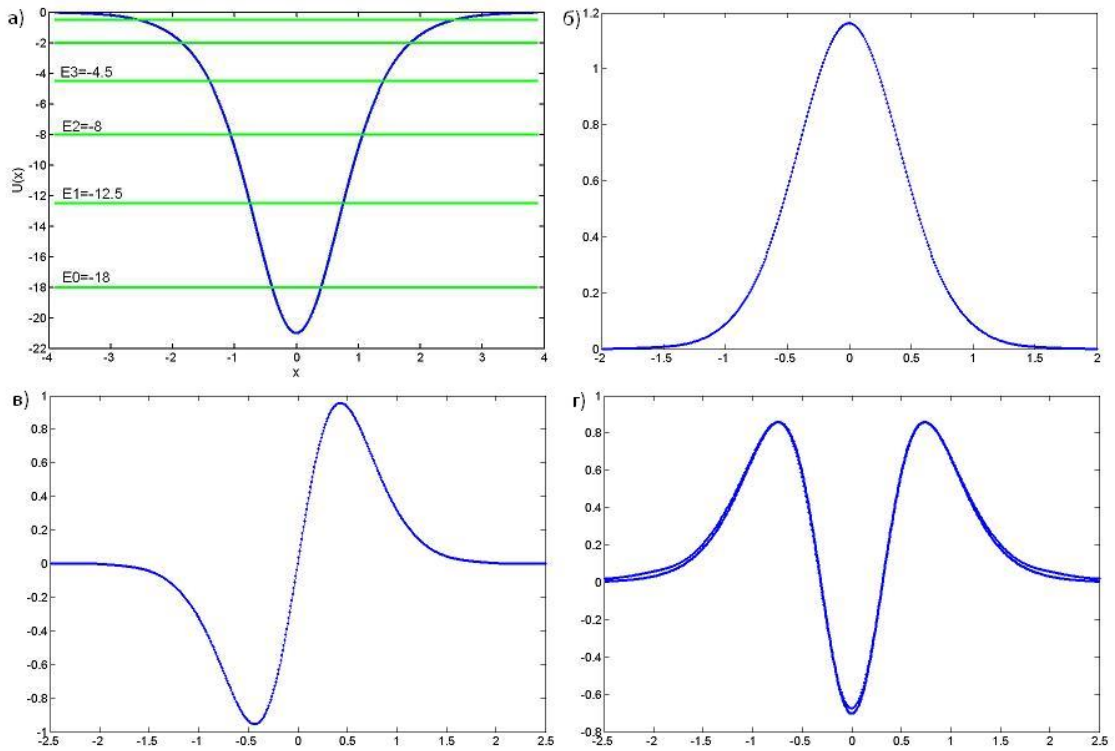


Рис. 7. Моделирование стационарных квантовых состояний в потенциале Пешля-Теллера (принимая  $\hbar = m = a = 1$ ): а) форма потенциальной ямы (для  $\lambda = 7$ ) и уровни энергии стационарных состояний, б) основное состояние ( $F = 0.999993, E = -17.995$ ), в) первое возбужденное состояние ( $F = 0.999992, E = -12.497$ ), г) второе возбужденное состояние ( $F = 0.998, E = -7.997$ ).

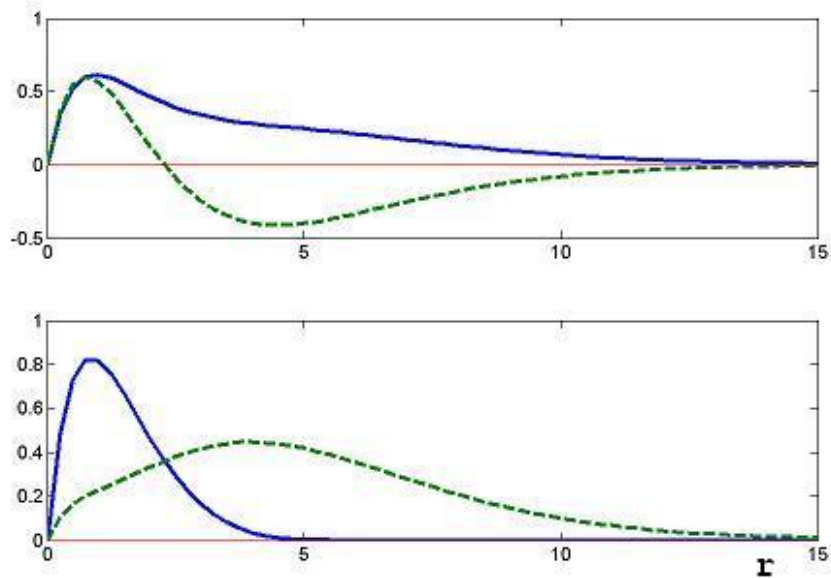


Рис. 8. Моды Шмидта (вверху) и орбитали (внизу) для отрицательного иона водорода. Сплошными кривыми изображены первые моды, штриховыми - вторые. Под орбиталями понимаются функции, полученные из мод Шмидта поворотом в гильбертовом пространстве  $u_1(r) = \cos(\alpha)\psi_1(r) + \sin(\alpha)\psi_2(r)$ ,  $u_2(r) = \cos(\alpha)\psi_1(r) - \sin(\alpha)\psi_2(r)$ , причём угол  $\alpha$  выбирается так, чтобы в выражении волновой функции двухчастичного состояния через орбитали не возникали перекрёстные члены  $u_1(r_1)u_1(r_2)$  и  $u_2(r_1)u_2(r_2)$ .

## Основные результаты работы:

- 1) развит общий подход к оценке качества и эффективности протоколов квантовых измерений, основанный на критериях адекватности, полноты и точности в задачах статистического восстановления квантовых состояний; рассмотрены статистические характеристики распределения точности реконструкции квантового состояния и сформулирована количественная граница для максимально возможной точности квантовой томографии; проведена теоретическая оценка минимальных потерь точности;
- 2) построены томографические протоколы на основе свойств симметрии правильных многогранников, а также на основе других многогранников с высокой симметрией – усечённого икосаэдра (геометрия фуллерена) и двойственного к нему пентакисдодекаэдра;
- 3) показано, что распределение потерь точности при статистическом восстановлении, удовлетворяет обобщённому хи-квадрат распределению, число степеней свободы которого является функцией ранга смешанного квантового состояния; представлены численные эксперименты, отражающие динамику максимальных потерь точности с ростом числа граней, задающего протокол многогранника, для 1-, 2-, 3- кубитных систем;
- 4) проведён анализ экспериментов, восстанавливающих состояния оптических поляризационных кубитов; выработан критерий, позволяющий по объёму выборки определять возможность восстановить по ней слабую зашумленность состояния; показано поведение зависимости потерь точности от объёма выборки при выборе адекватного (учитывающего возможность малой засорённости) и неадекватного (правильно работающего в случае чистого состояния) протоколов измерений;
- 5) с помощью томографического метода Монте-Карло рассчитаны моды Шмидта волновой функции пары электронов в ионе Н; выявлены те отклонения (запутанность электронов) от приближения самосогласованного поля, что позволяют иону стабильно существовать.

## Цитируемая литература

- 1) *К.А. Валиев, А.А. Кокин*, Квантовые компьютеры: надежда и реальность, Ижевск: РХД (2001).
- 2) *Ю.И. Богданов, А.А. Кокин, В.Ф. Лукичев, А.А. Орликовский, И.А. Семенухин, А.Ю. Чернявский*. "Квантовая механика и развитие информационных технологий" // Информационные технологии и вычислительные системы, № 01/2012, стр. 17-31, (2012).
- 3) *М. Нильсен, И. Чанг*, Квантовые вычисления и квантовая информация, М.: Мир (2006).
- 4) *Дж. Прескилл*, Квантовая информация и квантовые вычисления, Москва-Ижевск: РХД, т.1 (2008), т.2 (2011).
- 5) *Rehacek J., Englert B-G. and Kaszlikowski D.* "Minimal qubit tomography" // Phys. Rev. A. V. 70. 052321. (2004).
- 6) *de Burgh M.D., Langford N.K., Doherty A.C. and Gilchrist A.* "Choice of measurement sets in qubit tomography" // Phys. Rev. A 78, 052122 (2008).
- 7) *Penrose R.* "A generalized inverse for matrices" // Proc. Cambridge Philos. Soc. V.51. P.406. (1955).
- 8) *Ю.И. Богданов*, Основная задача статистического анализа данных: корневой подход, М.:МИЭТ, (2002).
- 9) *Ю.И. Богданов*. "Унифицированный метод статистического восстановления квантовых состояний, основанный на процедуре очищения" // ЖЭТФ т.135, в.6 (2009).
- 10) *Г. Крамер*, Математические методы статистики. М.: Мир, (1975).
- 11) *Ю.И. Богданов, Л.А. Кривицкий, С.П. Кулик*. "Статистическое восстановление квантовых состояний оптических трехуровневых систем" // Письма в ЖЭТФ 78, 804 (2003).
- 12) *Yu.I. Bogdanov, M.V. Chekhova, S.P. Kulik, L.A. Krivitsky, A.N. Penin, A.A. Zhukov, L.C. Kwek, C.H. Oh and M.K. Tey.* "Statistical reconstruction of qutrits"// Phys. Rev. A. 70, 042303 (2004).
- 13) *Yu.I. Bogdanov, M.V. Chekhova, S.P. Kulik, G.A. Maslennikov, A.A. Zhukov, C.H. Oh and M.K. Tey.* "Qutrit State Engineering with Biphotons" // Phys. Rev. Lett. 93, 230503 (2004).
- 14) *Yu.I. Bogdanov, R.F. Galeev, S.P. Kulik, E.V. Moreva, G.A. Maslennikov and S.S. Straupe.* "Polarization states of four-dimensional systems based on biphotons"// Phys. Rev. A. 73, 063810 (2006).
- 15) *James D.F., Kwiat P.G., Munro W.J., and White A.G.* "Measurement of qubits"// Phys. Rev. A. V.64. 052312. (2001).
- 16) *Metropolis N., Rosenbluth A.W., Rosenbluth M.N., Teller A.H., Teller E.* Equation of State Calculations by Fast Computing Machines // J. Chem. Phys. V.21. №6. p.1087-1092. (1953).

### Публикации автора по теме диссертации:

- A1. E. V. Moreva, Yu. I. Bogdanov, A.K. Gavrichenko, I.V. Tikhonov and S.P. Kulik. Optimal protocol for polarization ququart state tomography // Applied Mathematics & Information Sciences 3(1), pp.1-12. (2009).
- A2. Ю.И. Богданов, К.А. Валиев, С.А. Нуянзин, А.К. Гавриченко. Информационные аспекты интерференционных экспериментов «который путь» с микрочастицами // Микроэлектроника. Т.39. №4. с.243-264. (2010).
- A3. Ю.И. Богданов, С.П. Кулик, Е.В. Морева, И.В. Тихонов, А.К. Гавриченко. Оптимизация протокола статистического восстановления поляризационных кубитов // Письма в ЖЭТФ. Т.91. вып.12. с.755-761. (2010).
- A4. Ю.И. Богданов, И.Д. Букеев, А.К. Гавриченко. Исследование адекватности, полноты и точности протоколов квантовых измерений // Оптика и спектроскопия. Т. 111. №4. с. 680-689. (2011).
- A5. Ю.И. Богданов, А.К. Гавриченко, К.С. Кравцов, С.П. Кулик, Е.В. Морева, А.А. Соловьев. Статистическое восстановление смешанных состояний поляризационных кубитов // ЖЭТФ. Т. 140. вып.2. с. 224–235 (2011).
- A6. А.Ю. Богданов, Ю.И. Богданов, А.К. Гавриченко. Томографический метод моделирования квантовых систем // Труды ФТИАН. М. Наука. Т.19. с. 23 - 46. (2008).
- A7. Ю.И. Богданов, А.К. Гавриченко, В.Ф. Лукичев, А.А. Орликовский. Методы оценивания качества квантовых информационных технологий на основе квантовых измерений // Труды ФТИАН. М. Наука. Т.23. с. 76-108. (2013).
- A8. Yu.I. Bogdanov, A.Yu. Bogdanov, S.A. Nuyanzin, A.K. Gavrichenko. On the Information Aspects of Interfering Quantum States // Quantum Computers and Computing Vol.8 № 1, pp. 15-40. (2008).
- A9. Yu.I. Bogdanov, K.A. Valiev, A.Yu. Bogdanov, S.A. Nuyanzin, A.K. Gavrichenko. Information aspects of “which way” experiments with microparticles // Quantum Computers and Computing Vol. 9 № 1, pp. 48-58. (2009).
- A10. Yu.I. Bogdanov, A.K. Gavrichenko, S.P. Kulik, E.V. Moreva, and I.V. Tikhonov. Optimal qubit polarization states tomography // XIII International Conference on Quantum Optics and Quantum Information. Kiev. May 28- June 01. Book of Abstracts. p. 75. (2010).
- A11. Yu.I. Bogdanov, A.K. Gavrichenko. Adequacy, completeness, and accuracy of quantum measurement protocols // International Conference “Micro- and Nanoelectronics – 2012”, ES “Quantum Informatics – 2012”. Moscow – Zvenigorod. October 1st - 5th. Book of Abstracts. p. 193. (2012).